Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
3^er Examen Parcial (38 %)
Ene-Mar 2018

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(x-\ln\big(\cosh(x)\big)\Big)$

Solución: Como la función logaritmo es continua en todo su dominio, $\lim\limits_{x\to a}\ln\big(f(x)\big)=\ln\Big(\lim\limits_{x\to a}f(x)\Big)$ si $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existe y pertenece a $(0,\infty)$. Luego,

$$\lim_{x\to\infty}\Big(x-\ln\big(\cosh(x)\big)\Big)=\lim_{x\to\infty}\Big(\ln\big(e^x\big)-\ln\big(\cosh(x)\big)\Big)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{e^x}{\cosh(x)}\right)=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\cosh(x)}\right)$$

$$=\ln\left(2\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)=\ln\left(2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{-2x}}\right)=\ln(2)$$

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh(x)}$

Solución:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh(x)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}=\int\frac{2}{2+e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{e^x}{2e^x+\big(e^x\big)^2+1}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{e^x}{\big(e^x+1\big)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{-2}{e^x+1}+C$$

para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

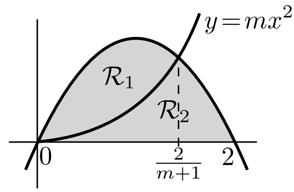
Pregunta 3. Considere la función $f(x)=2x-x^2$ definida sobre el intervalo $[0,2]$ y sea $\mathcal{R}=\big\{(x,y)\ :\ x\in[0,2],\,0\le y\le f(x)\big\}$.

a. (4 ptos.) Calcule el área de $\mathcal{R}$

b. (4 ptos.) Para cada $m>0$, la parábola $y=mx^2$ divide a $\mathcal{R}$ en dos regiones: $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Halle el valor de m para que las áreas de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ sean iguales.

Las curvas $y = 2x - x^2$ e $y = mx^2$ se cortan en el origen y en el punto $\left(\frac{2}{m+1}, \frac{4m}{(m+1)^2}\right)$, ya que

$$mx^2 = 2x - x^2 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\text{ o }\; x = \frac{2}{m+1}$$



El área de la región $\mathcal{R}_1$ viene dada por

$$\int_0^{\frac{2}{m+1}} \left(2x - x^2 - mx^2\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3(m+1)^2}$$

y el área de la región $\mathcal{R}_2$ viene dada por

$$\int_0^{\frac{2}{m+1}} mx^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{m+1}}^{2} \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right)$$

Para que ellas sean iguales es necesario que $(m+1)^2 = 2$, pero como $m > 0$ el valor deseado es $m = -1 + \sqrt{2}$.

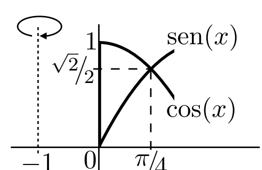
Pregunta 4. Considere la región acotada por las curvas $y = \mathrm{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$. Sea S el sólido que se genera al hacer rotar esta región alrededor de la recta $x = -1$.

a. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de arandelas.

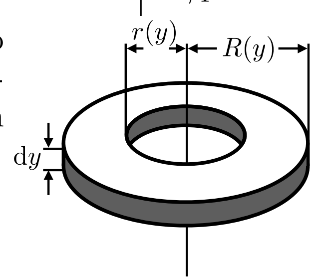
b. (4 ptos.) Exprese el volumen del sólido S mediante el método de cascarones.

c. (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido S.

Solución: La región acotada por las curvas $y = \mathrm{sen}(x)$, $y = \cos(x)$, el eje y y la recta vertical $x = \pi/4$ está ilustrada en la figura a la derecha.



Para expresar el volumen mediante el método de arandelas hacemos cortes transversales. Para cada y entre 0 y 1 el diferencial de volumen viene dado por



$$\mathrm{d}V = \pi\Big(\big(R(y)\big)^2 - \big(r(y)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}y$$

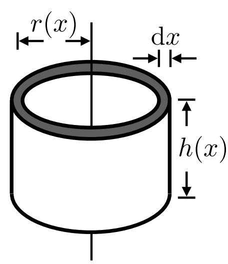
donde

$$r(y) \equiv 1 \quad \text{y} \quad R(y) = \begin{cases} 1 + \arccos(y) & , \text{ si } y \in \left[\sqrt{2}/2, 1\right] \\ 1 + \operatorname{arcsen}(y) & , \text{ si } y \in \left[0, \sqrt{2}/2\right] \end{cases}$$

Así, el volumen viene dado por

$$\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \Big(2 \operatorname{arcsen}(y) + \big(\operatorname{arcsen}(y)\big)^2\Big) \mathrm{d}y + \pi \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \Big(2 \arccos(y) + \big(\arccos(y)\big)^2\Big) \mathrm{d}y$$

Para expresar el volumen mediante el método de cascarones hacemos cortes coaxiales. Para cada x entre 0 y $\pi/4$ el diferencial de volumen viene dado por



$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x$$

donde

$$r(x) = 1 + x \quad \text{y} \quad h(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x)$$

Así, el volumen viene dado por

$$2\pi \int_0^{\pi/4} (1 + x)\big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)\, \mathrm{d}x$$

Finalmente, el volumen de sólido S es $\pi\Big(-4 + 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\Big)$.

Pregunta 5. (6 ptos.) Determine si la integral impropia $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{4x-2}{\sqrt{x^7-1}}\, \mathrm{d}x$ es convergente.

Solución: Como $x \geq 10$ entonces $0 < x^6 < x^7 - 1$. Así,

$$\frac{4x-2}{\sqrt{x^7-1}} < \frac{4x}{\sqrt{x^7-1}} < \frac{4x}{\sqrt{x^6}} = \frac{4}{x^2}$$

Como $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente para $p > 1$, se tiene que $\int\limits_{10}^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ también es convergente para $p > 1$. En particular, $4\int\limits_{10}^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente. Dado que $0 \leq \frac{4x-2}{\sqrt{x^7-1}} \leq \frac{4}{x^2}$ para todo $x \in [10,\infty)$, el Criterio de Comparación establece que $\int\limits_{10}^\infty \frac{4x-2}{\sqrt{x^7-1}}\,\mathrm{d}x$ también es convergente.